

Guía docente para el desarrollo de la competencia Matemática con ítems PISA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA
DIRECCIÓN DE GESTIÓN Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD

Tabla de contenido

Presentación	2
¿Qué es PISA?	3
¿Qué es la competencia Matemática?	3
¿Qué se debe entender por conocimientos previos?	3
¿Qué es un proceso?	3
¿Qué se entiende por contenido?	4
¿Qué son los contextos?	4
Unidad 1: Inversiones.....	5
Unidad 2: Cobertura agrícola en los países del Caribe	7
Unidad 3: Preferencia de bebidas calientes	10
Unidad 4: Consumo de combustible.....	13
Unidad 5: Pedidos entregados	16
Unidad 6: Mudanza	19

Presentación

El Ministerio de Educación Pública y la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad ponen a disposición de las personas docentes de Matemáticas una selección de ítems similares a los utilizados en la prueba internacional PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), administrada por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos).

Este documento sirve como guía para fortalecer la competencia matemática. Su objetivo es proporcionar herramientas que ayuden a los docentes a desarrollar en sus estudiantes el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la aplicación de conceptos matemáticos en contextos reales.

Cada pregunta incluye los procesos y acciones necesarios para su resolución según el marco de referencia de PISA, así como los conocimientos previos requeridos, el contenido matemático abordado y el contexto en el que se plantea. Además, se presentan la solución del ítem y los errores más frecuentes entre los estudiantes.

Al guiar la revisión de los ítems, el docente debe asegurarse de que el estudiante comprenda la intención de la pregunta, identifique los conceptos matemáticos involucrados y aplique el razonamiento adecuado para resolverla. Asimismo, debe fomentar el análisis crítico de los procedimientos utilizados, promoviendo la reflexión sobre posibles errores y estrategias alternativas que favorezcan una mejor comprensión y dominio de la competencia matemática.

Finalmente, como material de apoyo, este documento presenta algunos enlaces de sitios web que recopilan una variedad de ítems liberados de los distintos estudios PISA que iniciaron desde el 2000; estos han sido publicados para su difusión, información y uso público.

Esperamos que este material sea una herramienta valiosa para el éxito académico de los estudiantes y contribuya a la mejora continua de la educación en Costa Rica.

¿Qué es PISA?

El Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés, Programme for International Student Assessment) es un estudio de evaluación educativa inter-nacional, promovido por la OCDE y los países participantes, que intenta responder a una necesidad común a todos los sistemas educativos actuales: delimitar, describir y explicar lo que los jóvenes de 15 años saben hacer, al aplicar sus conocimientos a una variedad de entornos y contextos.

¿Qué es la competencia Matemática?

De acuerdo con el marco referencial del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) 2022, la competencia matemática de debe entenderse como la capacidad de un individuo para razonar matemáticamente y para formular, emplear e interpretar la Matemática para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo. Incluye utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a conocer el papel que la Matemática juega en el mundo además de colaborar en la elaboración de juicios bien fundados y en la toma de las decisiones que necesita un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo del siglo 21". (OCDE/PISA; 2021)

¿Qué se debe entender por conocimientos previos?

Los conocimientos previos son herramientas matemáticas fundamentales que los estudiantes deben poseer para resolver los problemas que se les presentan.

¿Qué es un proceso?

Los procesos matemáticos son las acciones que los estudiantes deben realizar para resolver problemas. PISA los organiza en tres pasos:

- **Formular:** Identificar y traducir un problema del mundo real a un lenguaje matemático. Por ejemplo, convertir una situación de la vida real en una ecuación.
- **Emplear:** Usar las matemáticas para resolver el problema. Esto incluye calcular, interpretar gráficos o aplicar fórmulas.
- **Interpretar:** Explicar el resultado en el contexto del problema original. Por ejemplo, dar significado a un número calculado en una situación real.

¿Qué se entiende por contenido?

Los contenidos son áreas que buscan cubrir los conceptos matemáticos que más se usan en la vida diaria.

Las cuatro áreas principales son:

- **Cantidad:** Trabajar con números, cálculos y porcentajes. Por ejemplo, estimar precios o calcular un descuento.
- **Espacio y forma:** Geometría y visualización de figuras, como interpretar mapas o diagramas.
- **Cambio y relaciones:** Relaciones entre variables y patrones, como analizar cómo cambia un gráfico con el tiempo.
- **Incertidumbre y datos:** Probabilidad y estadística, como entender probabilidades en un juego o datos en una encuesta.

¿Qué son los contextos?

PISA evalúa cómo los estudiantes usan las matemáticas para resolver problemas del mundo real. Esto incluye situaciones que pueden ocurrir en diferentes contextos:

- **Personal:** Cosas del día a día, como administrar dinero o planificar compras.
- **Ocupacional:** Problemas relacionados con el trabajo, como calcular costos o interpretar gráficos en una empresa.
- **Social:** Temas de interés colectivo, como entender estadísticas de una encuesta o comparar datos de población.
- **Científico:** Usar matemáticas en temas como el cambio climático o la tecnología.

Unidad 1: Inversiones

Juan está considerando invertir ₡80 000 en uno de dos bancos, durante un período de tres años. Ambos bancos ofrecen una tasa de interés del 5 %. A continuación, se presentan las fórmulas que cada banco utiliza para calcular el interés:

Banco W	Banco S
$I = P \bullet ((1 + r)^t - 1)$	$I = P \bullet r \bullet t$
Simbología I: Monto ganado producto del interés (rentabilidad) P: Monto de inversión r: Tasa de interés en notación decimal (ejemplo, 4% en notación decimal es 0,04) t: tiempo en años de la inversión	

Ítem 1: ¿En cuál banco debería invertir Juan su dinero para obtener la mayor rentabilidad? Justifique su respuesta.

Descripción:

Conocimientos previos:	Evaluación de valores dados en expresiones algebraicas, cálculo de potencias, cálculo de operaciones básicas.
Proceso:	Emplear
Contenido:	Cambio y relaciones
Contexto:	Personal
Solución:	Banco W: $I = 80\,000 \cdot ((1 + 0,05)^3 - 1) = \text{C}\$12\,610$ Banco S: $I = 80\,000 \cdot 0,05 \cdot 3 = \text{C}\$12\,000$ Por lo tanto, Juan debe invertir su dinero en el banco W para obtener una mayor rentabilidad.
Errores frecuentes:	Confundir las fórmulas: Usar la fórmula de interés simple para calcular el interés compuesto o viceversa. Olvidar calcular el exponente en el Banco W: Algunos estudiantes podrían multiplicar $1 + r$ por t en lugar de elevarlo a la potencia t . No restar 1 en la fórmula de interés del Banco W: Esto llevaría a calcular el monto total en lugar del interés ganado. Confundir la tasa como porcentaje: Usar 5 en lugar de 0,05 en los cálculos, lo que generaría resultados incorrectos.

Unidad 2: Cobertura agrícola en los países del Caribe

En los países del Caribe, se utiliza un porcentaje significativo de sus territorios para actividades agrícolas. A continuación, se presentan datos sobre la extensión territorial y el porcentaje utilizado para agricultura:

País	Extensión en kilómetros cuadrados del territorio	Porcentaje del territorio utilizado para agricultura
República Dominicana	48 671	40 %
Jamaica	10 991	45 %
Haití	27 750	55 %
Trinidad y Tobago	5131	35 %
Barbados	431	50

Ítem 1: Luego de analizar los datos una persona afirma: "El territorio utilizado para agricultura en Jamaica es mayor que el utilizado para agricultura en República Dominicana."

Explique por qué esta afirmación es incorrecta. Justifique su respuesta.

Descripción:

Conocimientos previos:	Interpretación y cálculo de porcentajes.
Proceso:	Emplear.
Contenido:	Cantidad
Contexto:	Laboral
Solución:	<p>Calcular la extensión del territorio destinado a la agricultura en cada país.</p> <ul style="list-style-type: none">• Jamaica: $10\ 991 \times 45/100 = 4\ 945,95\ \text{km}^2$.• República Dominicana: $48\ 671 \times 40/100 = 19\ 468,4\ \text{km}^2$. <p>Comparar los resultados:</p> <ul style="list-style-type: none">• El territorio agrícola de República Dominicana ($19\ 468,4\ \text{km}^2$) es mayor que el de Jamaica ($4\ 945,95\ \text{km}^2$). <p>Justificar que la afirmación es incorrecta porque la República Dominicana tiene un territorio mucho más grande y, aunque el porcentaje utilizado es menor, la cantidad total destinada a la agricultura es superior.</p>
Errores frecuentes:	<p>No convertir correctamente el porcentaje en una fracción decimal: Algunos estudiantes podrían no entender cómo transformar el porcentaje en un decimal, por ejemplo, usar 45 en lugar de 0,45; lo que llevaría a cálculos erróneos.</p> <p>Confundir el porcentaje con el valor absoluto: Creer que el porcentaje es directamente comparable sin considerar el tamaño total del territorio, por ejemplo, afirmar que 45 % del territorio en Jamaica implica más territorio agrícola que el 40 % en República Dominicana.</p> <p>Errores en la multiplicación: Realizar cálculos incorrectos al multiplicar la extensión territorial con el porcentaje.</p> <p>Falta de comparación: Calcular correctamente las áreas agrícolas, pero no realizar la comparación entre las dos cantidades para justificar la afirmación.</p>

Ítem 2: Una empresa productora de alimentos desea invertir en un país caribeño que cumpla con las siguientes condiciones:

- La extensión territorial debe ser mayor a 10 000 km².
- Al menos la mitad de su territorio debe estar destinado a actividades agrícolas.

¿Cuál país caribeño cumple con las condiciones de la empresa?

A) República Dominicana

B) Barbados

C) Jamaica

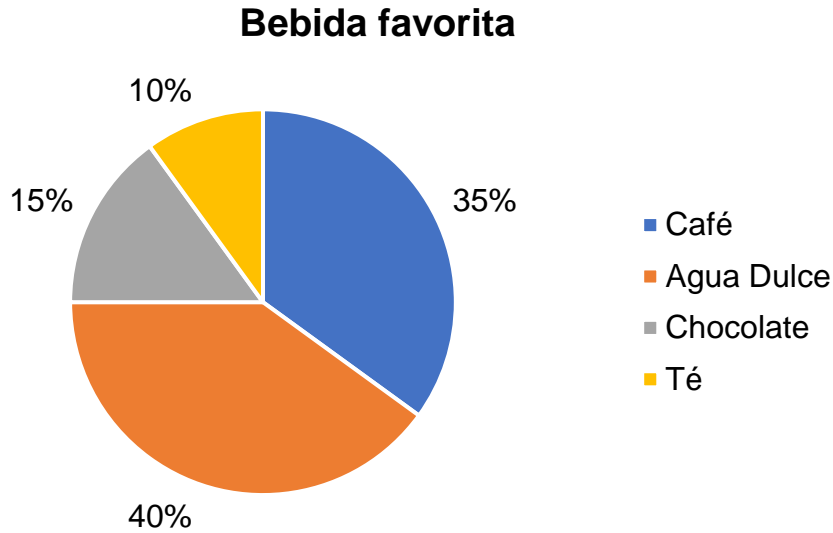
D) Haití

Descripción:

Conocimientos previos:	Interpretación de datos representados tabularmente.
Proceso:	Formular.
Contenido:	Cantidad.
Contexto:	Laboral.
Solución:	Identificar los países con más de 10 000 km ² : República Dominicana, Jamaica y Haití cumplen esta condición. Identificar los países en los que al menos la mitad del territorio esté destinado a actividades agrícolas: Haití (55 %) y Barbados (50 %). Concluir que el país que cumple ambas condiciones es Haití.
Errores frecuentes:	Confusión entre valores porcentuales y absolutos: Interpretar el porcentaje como una cantidad absoluta, por ejemplo, asumir que un 55 % significa 55 km ² , sin realizar el cálculo proporcional. Falta de comparación de ambos criterios: Verificar solo una de las condiciones (extensión territorial o porcentaje agrícola) y no ambas, llevando a respuestas incorrectas.

Unidad 3: Preferencia de bebidas calientes

Una cafetería llevó a cabo un seguimiento detallado de las preferencias de sus clientes por las bebidas calientes durante el mes de julio. Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente gráfico:



Ítem 1: En agosto, la cafetería lanzó una promoción con un 20% de descuento en las bebidas menos vendidas: Chocolate y Té. Como resultado, las ventas de Chocolate aumentaron un 40% y las de Té un 30% en comparación con el mes anterior, mientras que las ventas de las otras bebidas se mantuvieron sin cambios. ¿En cuánto aumentaron porcentualmente las ventas totales de bebidas calientes durante agosto con respecto a julio?

Explique por qué esta afirmación es incorrecta. Justifique su respuesta.

Descripción:

Conocimientos previos:	Cálculo con porcentajes, conversión de porcentajes a notación decimal.
Proceso:	Emplear
Contenido:	Cantidad
Contexto:	Ocupacional
Solución:	<p>Se debe determinar el aumento en las ventas de Chocolate y Té.</p> <p>Chocolate: Representa el 15 % de las ventas totales. Un aumento del 40% significa que las ventas de Chocolate aumentaron en un 40% de 15%, es decir: $15 \% \times 40 \% = 6 \%$</p> <p>Por lo tanto, el aumento en las ventas de Chocolate incrementó las ventas totales de bebidas calientes en un 6 %.</p> <p>Té: Representa el 10 % de las ventas totales. Un aumento del 30 % significa que las ventas de Té aumentaron en un 30 % de 10 %, es decir: $10 \% \times 30 \% = 3 \%$</p> <p>Por lo tanto, el aumento en las ventas de Té incrementó las ventas totales de bebidas calientes en un 3 %.</p> <p>El aumento total en las ventas de bebidas calientes será la suma de estos porcentajes: $6 \% + 3 \% = 9 \%$</p>
Errores frecuentes:	<p>No calcular correctamente el aumento porcentual: Un error común es no aplicar el porcentaje de aumento correctamente. Por ejemplo, si un estudiante calcula un aumento del 40 % sobre el 15 % de las ventas de Chocolate, puede cometer el error de pensar que el aumento es del 40 % sobre el valor total, en lugar de aplicarlo solo sobre el 15 %. La forma correcta es multiplicar 15 % por 40 %, lo que da un aumento del 6 %.</p> <p>Confundir la interpretación de los porcentajes: A veces, los estudiantes confunden la forma de aplicar los aumentos. En lugar de ver que el aumento del 40% significa un incremento adicional de un porcentaje sobre las ventas originales, pueden</p>

	<p>pensar erróneamente que el aumento representa un valor total, lo que genera una sobreestimación del cambio.</p> <p>No convertir correctamente el porcentaje en una fracción decimal: Algunos estudiantes podrían no entender cómo transformar el porcentaje en un decimal, por ejemplo, usar 40 en lugar de 0,4; lo que llevaría a cálculos erróneos.</p>
--	--

Unidad 4: Consumo de combustible

La fórmula para calcular el consumo de combustible por kilómetro de un automóvil es:

$$C = \frac{F}{D}$$

donde:

- C es el consumo de combustible por kilómetro (en litros por kilómetro),
- F es la cantidad de combustible usado (en litros),
- D es la distancia recorrida (en kilómetros).

Ítem 1: Si un automóvil consume 36 L de combustible para recorrer 300 km, entonces, ¿cuál es su consumo por kilómetro?

A) 0,08 L/km

B) 0,10 L/km

C) 0,12 L/km

Descripción:

Conocimientos previos:	Fracciones, operaciones aritméticas fundamentales.
Proceso:	Emplear
Contenido:	Cambio y relaciones
Contexto:	Laboral
Solución:	Se sustituyen los valores, $F = 36 \text{ L}$ y $D = 300 \text{ km}$: $C = 36/300 = 0,12$ Por lo tanto, el consumo de combustible por kilómetro es 0,12 L/km
Errores frecuentes:	No calcular correctamente la división: Un error común es no realizar correctamente la operación $36/300$. Intercambio de los valores de F y D: Algunos estudiantes podrían intercambiar los valores de F (combustible) y D (distancia), dividiendo la distancia

	entre la cantidad de combustible en lugar de al revés. Esto llevaría a un resultado erróneo.
--	---

Ítem 2: El dueño del vehículo quiere disminuir el consumo de combustible por kilómetro a la mitad.

Describe con precisión cómo cambia “D”, pero F (la cantidad de combustible usado) no cambia.

Descripción:

Conocimientos previos:	Relación entre variables, operaciones básicas, concepto de proporciones.
Proceso:	Interpretar
Contenido:	Cambio y relaciones
Contexto:	Laboral
Solución:	Para disminuir el consumo de combustible por kilómetro a la mitad, el dueño del vehículo debe duplicar la distancia recorrida. Esto se logra conduciendo más lejos con la misma cantidad de combustible, lo que reduce el consumo por kilómetro sin cambiar la cantidad de combustible utilizado.
Errores frecuentes:	No reconocer la relación inversa entre el consumo y la distancia: Suponer que el consumo por kilómetro se reduce simplemente aumentando la cantidad de combustible usado, sin tener en cuenta que, en este caso, el consumo de combustible por kilómetro está inversamente relacionado con la distancia recorrida.

Unidad 5: Pedidos entregados

En una empresa de mensajería, se registraron los envíos que llegaron fuera del tiempo acordado (con retraso) y los que se entregaron puntualmente durante un mes. Los datos se presentan en la siguiente tabla:

Centro de distribución	Cantidad de pedidos entregados con retraso	Cantidad de pedidos entregados puntualmente
X	15	135
Y	20	180

Ítem 1: Un analista dice: “El centro de distribución Y debe revisar sus procesos, ya que tiene un mayor porcentaje de pedidos retrasados.” Explique por qué es incorrecta esta afirmación. Justifique su respuesta.

Descripción:

Conocimientos previos:	Cálculo e interpretación de porcentajes, comparación de valores relativos.
Proceso:	Interpretar
Contenido:	Incertidumbre y datos
Contexto:	Ocupacional
Solución:	<p>Se calcula el porcentaje de pedidos retrasados para cada centro de distribución.</p> <p>Centro de distribución X: 15 pedidos entregados con algún retraso de 150 entregados en total. Porcentaje de pedidos retrasados: $15/150 = 10\%$.</p> <p>Centro de distribución Y: 20 pedidos entregados con algún retraso de 200 entregados en total. Porcentaje de pedidos retrasados: $20/200 = 10\%$.</p> <p>No se puede concluir que el centro X sea peor que el centro Y con respecto a los retrasos, ya que el porcentaje de pedidos con retraso es idéntico en</p>

	<p>ambos centros. Aunque el centro Y tuvo más pedidos retrasados en términos absolutos (20 vs. 15), esto se debe a que procesó más pedidos en total, y al comparar los porcentajes relativos, ambos centros tienen el mismo desempeño en este aspecto.</p>
Errores frecuentes:	<p>No calcular correctamente el porcentaje de pedidos con retraso: Olvidar realizar la suma para determinar el total de productos entregados por cada centro.</p> <p>Comparar los valores absolutos: Realizar la comparación entre 20 y 15, sin calcular el porcentaje.</p>

Ítem 2: ¿Qué porcentaje del total de pedidos entregados por la empresa de mensajería en ese mes fueron entregados puntualmente?

- A) 9 %
- B) 90 %
- C) 18 %
- D) 80 %

Descripción:

Conocimientos previos:	Cálculo e interpretación de porcentajes.
Proceso:	Interpretar
Contenido:	Incertidumbre y datos
Contexto:	Ocupacional
Solución:	Se calcula la cantidad total de pedidos entregados con retraso y puntualmente: Con retraso: 15 (Centro X) + 20 (Centro Y) = 35. Puntuales: 135 (Centro X) + 180 (Centro Y) = 315. Posteriormente, se calcula el porcentaje de productos entregados puntualmente: Porcentaje = $(315 / (315 + 35)) * 100 = 90 \%$.
Errores frecuentes:	Calcular erróneamente el porcentaje de productos entregados puntualmente: No sumar correctamente los pedidos entregados con retraso o puntualmente de ambos centros o cometer errores en la división.

Unidad 6: Mudanza

Una familia está realizando una mudanza y planea utilizar un camión con las siguientes dimensiones interiores del cajón:

Dimensiones del piso del cajón: 4 m x 2 m

Distancia entre el piso y el techo del cajón: 2,5 m

Las cajas que se usarán para la mudanza tienen estas dimensiones:

- altura: 75 cm
- largo: 60 cm
- ancho: 50 cm

Ítem 1: ¿Cuál es el mayor número de cajas que pueden caber en el cajón del camión si las cajas se pueden colocar en cualquier orientación?

- A) 72
- B) 78
- C) 80
- D) 88

Descripción:

Conocimientos previos:	Conversión de unidades, operaciones básicas, visualización espacial, truncamiento de decimales.
Proceso:	Interpretar
Contenido:	Espacio y forma
Contexto:	Ocupacional
Solución:	<p>Es necesario convertir las dimensiones del cajón a las mismas unidades que las de la caja, ya sea todas a metros o todas a centímetros (se recomienda convertir las dimensiones del cajón a centímetros para evitar trabajar con decimales).</p> <p>Dado que las cajas pueden colocarse en cualquier orientación, se debe comparar la mayor dimensión del cajón con la mayor de la caja, la dimensión intermedia del cajón con la intermedia de la caja y la menor dimensión del cajón con la menor de la caja.</p> <p>Así:</p> <ul style="list-style-type: none">• Cajas a lo largo: 400/75; 5 cajas.• Cajas a lo ancho: 200/50; 4 cajas.• Cajas a lo alto: 250/60; 4 cajas.• Total: $5 \times 4 \times 4 = 80$ cajas.
Errores frecuentes:	<p>No convertir correctamente las unidades: Multiplicar o dividir por una potencia incorrecta de 10.</p> <p>No explorar las diferentes orientaciones de las cajas: Comparar el largo del cajón con largo de la caja, el ancho del cajón con el ancho de la caja y la altura del cajón con la altura de la caja.</p> <p>Considerar únicamente el volumen: No tener en cuenta las dimensiones del cajón ni de la caja, solo comparar los volúmenes del cajón y de la caja.</p> <p>Error al truncar el número decimal producto de las divisiones: Al realizar las divisiones redondea el número obtenido sin considerar el contexto del problema.</p>

Enlaces para ítems liberados PISA Matemáticas

<https://www.educacionfpydeportes.gob.es/dam/jcr:f87be7ee-51fc-42b1-bb15-9c8a592a1d11/anexo--preguntas-liberadas-pisa-2022.pdf>

<http://educalab.es/documents/10180/414804/RE1.pdf/b838f33b-ca10-44a9-a03d-7803ba34ba70>

Referencias bibliográficas

Administración Nacional de Educación Pública. (2022). *Marco Conceptual de Matemática PISA*.

<https://pisa.anep.edu.uy/sites/default/files/Recursos/Marcos%20conceptuales/2022-PISA-Uruguay-Marcos%20conceptuales-Marco%20matema%CC%81tica.pdf>